Dualité en programmation linéaire

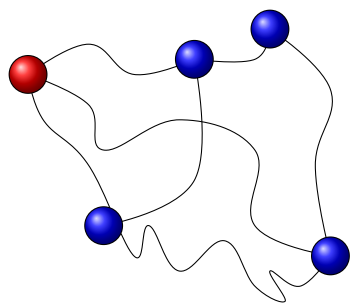
François Schwarzentruber

8 mai 2023

1 Problème dual

Définition 1 (programme dual) A tout programme linéaire, appelé *programme primal*, on associe un programme linéaire, appelé le *programme dual*, en utilisant cette recette de cuisine :

	Programme primal	Programme dual
Variables	$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_m$
Matrice	A	A^t
Vecteur de droite	b	c
Fonction objectif	**maximiser** $c^t x$	**minimiser** $b^t y$
Constraintes	la i-ème contrainte a $\leq$	$y_i \geq 0$
	la i-ème contrainte a $\geq$	$y_i \leq 0$
	la i-ème contrainte a $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-ème contrainte a $\geq$
	$x_j \leq 0$	j-ème contrainte a $\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	j-ème contrainte a $=$



Proposition 2 Le dual du dual de P est P.

2 Théorèmes de dualité

Programme primal P
maximiser $c^t x$
$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Programme dual D
minimiser $b^t y$
$$\begin{cases} A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Théorème 3 (de dualité faible) Pour toute solution x de P, pour toute solution y de D, $c^t x \leq b^t y$.

Théorème 4 (de dualité forte) On est dans l'une des quatre situations suivantes :

1. P et D n'admettent pas de solutions ;
2. P est non borné et D n'admet pas de solutions ;
3. P n'admet pas de solutions et D est non borné ;
4. P possède une solution optimale x^*, D possède une solution optimale y^* et $c^t x^* = b^t y^*$.

3 Correspondance entre solutions primal/dual

Théorème 5 (coefficients magiques) Voici une solution optimale du problème dual :

exécuter l'algorithme du simplexe dans le problème primal
soit c' le vecteur des coefficients dans l'objectif du tableau final
$y^* :=$ opposés des coefficients dans c' des variables d'écart (coefficient nul si dans la base)

Théorème 6 (des écarts complémentaires) Soit x une solution du primal P et y une solution du dual D.

x et y sont solutions optimales de respectivement P et D ssi

1. pour tout indice i de contraintes de P, $y_i \times (b_i - \sum_j a_{ij} x_j) = 0$;
2. et pour tout indice j de contraintes de D, $x_j \times (\sum_i a_{ij} y_i - c_j) = 0$.

4 Matrices totalement unimodulaires

Cas où un programme linéaire réel à coefficients entiers admet une solution optimale entière

Définition 7 (matrice totalement unimodulaire) Une matrice est totalement unimodulaire si toute sous-matrice (en supprimant quelques lignes et/ou colonnes) carrée est de déterminant -1, 0 ou 1.

Proposition 8 Une matrice totalement unimodulaire ne contient que des -1, 0 ou 1.

Proposition 9 Soit A une matrice totalement unimodulaire. La matrice $\bar{A}$ obtenue en ajoutant un vecteur unité e_i en dernière colonne est aussi totalement unimodulaire.

Théorème 10 Considérons un programme linéaire $\begin{array}{l} \text{maximiser } c^t x \\ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$ où $b \in \mathbb{Z}^m$ et A totalement unimodulaire. Si le programme admet une solution optimale, alors il admet une solution optimale entière $x^* \in \mathbb{Z}^n$.

Proposition 11 Soit A une matrice contenant seulement les éléments 0, 1 ou -1 et qui satisfait les 2 conditions suivantes :

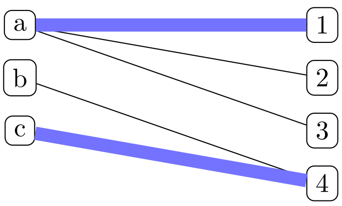
1. Chaque colonne contient au plus 2 éléments non nuls ;
2. Les lignes de A peuvent être partitionnées en 2 sous-ensembles S_1 et S_2 tel que pour chaque colonne contenant 2 éléments non nuls :
   - Si les 2 éléments non nuls ont le même signe, alors l'un est dans S_1 et l'autre dans S_2 ;
   - Si les 2 éléments non nuls sont de signe différents, alors ils sont tous deux dans S_1, ou tous deux dans S_2.

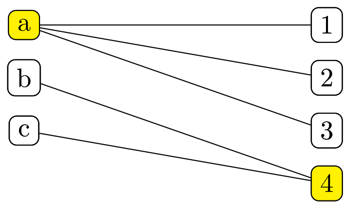
Alors A est totalement unimodulaire.

5 Théorème de König

Théorème 12 Dans un graphe biparti,

$$\text{cardinal d'un couplage maximal} \quad = \quad \text{cardinal d'une couverture minimal de sommets.}$$





Notes bibliographiques

La dualité est évoquée dans [DPV08] et [CLRS09]. L'explication avec le certificat provient de [DPV08]. Les démonstrations et les applications proviennent essentiellement de [GM07].

Références

[CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, 3rd Edition.* MIT Press, 2009.

[DPV08] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh V. Vazirani. *Algorithms.* McGraw-Hill, 2008.

[GM07] Bernd Gärtner and Jirí Matousek. *Understanding and using linear programming.* Universitext. Springer, 2007.