TD NP-complétude

`Exercice 1` — `ensembles indépendants`

Le problème ENS INDEP est le suivant :

entrée : un graphe $G = (S, A)$ non orienté et $k \in \mathbb{N}$;
sortie : oui ssi il existe un ensemble S' de taille k tel que $A \cap (S' \times S') = \varnothing$.

On propose la transformation suivante : les occurrences des littéraux d'une 3-forme normale conjonctive sont les sommets du graphe. On relie les occurrences qui sont dans la même clause et aussi les occurences opposées.

1. Quel graphe obtient-on à partir de $\varphi = (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y)$?

2. Montrer que ENS INDEP est NP-complet.

Le problème COUVERTURE SOMMET est le suivant :

entrée : un graphe $G = (S, A)$ non orienté et $k \in \mathbb{N}$;
sortie : oui ssi il existe un ensemble C de taille k tel que pour tout $(x, y) \in A$, $x \in C$ ou $y \in C$.

3. Montrer que COUVERTURE SOMMET est NP-complet.

Le problème CLIQUE est le suivant :

entrée : un graphe $G = (S, A)$ non orienté et $k \in \mathbb{N}$;
sortie : oui ssi il existe un ensemble C de taille k tel que pour tout $C \times C \subseteq A$.

4. Montrer que CLIQUE est NP-complet.

5. Soit k un entier. Est-ce que le problème suivant est NP-complet ?

entrée : un graphe $G = (S, A)$ non orienté
sortie : oui ssi il existe un ensemble C de taille k tel que pour tout $C \times C \subseteq A$.

6. Ecrire un algorithme en $O(|S|)$ pour résoudre CLIQUE pour des graphes où tous les sommets sont de degré ≤ 3.

`Exercice 2` `Coloration dans un graphe eulérien`

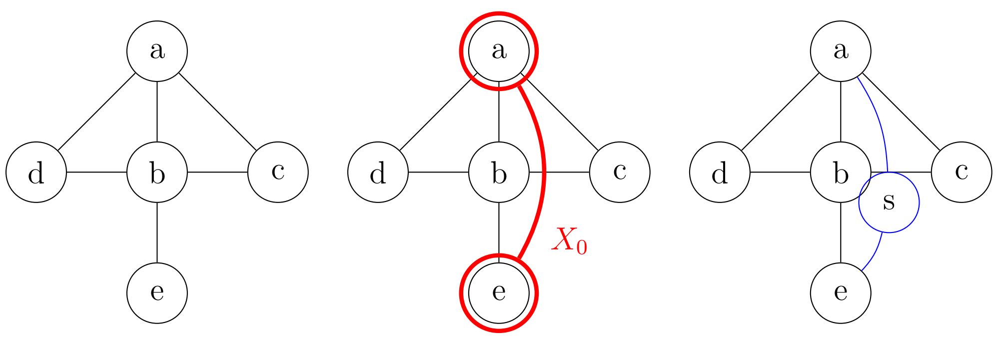
Le problème de la 3-coloration d'un graphe quelconque est NP-complet. On s'intéresse ici à une restriction sur les entrées de ce problème.

Un graphe non orienté est eulérien si tous ses sommets sont de degré pair (le degré d'un sommet s est le nombre d'arêtes qui contiennent s) et qu'il est connexe. Dans la suite de cet exercice, on considérera que tous les graphes utilisés sont connexes.

Un graphe $G = (S, A)$ est 3-coloriable s'il existe une fonction $c : S \to \{0, 1, 2\}$ tel que si $(s, t) \in A$, alors $c(s) \neq c(t)$. On s'intéresse au problème de la 3-coloration dans un graphe eulérien :

> entrée : un graphe non orienté eulérien
> sortie : oui, si le graphe est 3-coloriable.

1. Pour un graphe $G = S, A$ quelconque, montrer que l'ensemble des sommets de degrés impairs peut s'écrire comme une partition $\{s \in S | deg(s) = 1[2]\} = \bigcup_{i \in I} X_i$ où les X_i contiennent exactement deux sommets et sont disjoints deux à deux.



À partir d'un graphe (connexe) quelconque $G = (S, A)$, on construit G' en ajoutant pour chaque $X_i = \{a_i, b_i\}$, un nouveau sommet s_i à S et deux arêtes (a_i, s_i) et (b_i, s_i).

2. Montrer que le graphe G' ainsi obtenu est eulérien.

3. Montrer que le problème de la 3-coloration dans un graphe eulérien est NP-complet. (explicitez bien la réduction que vous faites)

`Exercice 3` **`2-SAT`**

Le problème 3-SAT est NP-complet. Dans cet exercice, nous allons montrer que si on se restreint aux formules qui sont des *formes normales conjonctives* d'ordre 2, comme par exemple $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \ldots$ alors le problème de satisfiabilité est dans P.

On définit le problème 2-SAT de la manière suivante :

> entrée : une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ sous formule normale conjonctive d'ordre 2
> sortie : oui ssi il existe une valuation pour $x_1 \ldots x_n$ qui rende ϕ vraie

1. En observant que la formule $x \vee y$ est équivalente à $\neg x \to y$, donner un problème équivalent sur les graphes orientés résoluble en temps polynomial.

2. Conclure.

`Exercice 4` **`Super Mario Bros`**

Un niveau de Super Mario bros est une matrice $n \times m$. Chaque case de la matrice contient soit du vide, soit une case avec un champignon qui grandit, soit une case à casser, soit une case incassable, soit une tortue, soit un champignon méchant, soit un drapeau de fin de niveau). Mario commence en $(0, 0)$.

On suppose connues les règles de Super Mario Bros. On s'intéresse au problème suivant :

> entrée : un niveau de Super Mario Bros
> sortie : oui ssi il est possible de finir le niveau

1. Que pensez-vous du problème restreint aux instances qui ne contiennent pas d'ennemis et ni de champignon qui grandit ?

2. Montrer que le problème est NP-complet. (penser à 3SAT)