<u>Théorème.</u> *Soit $a > 0$, $d \geq 2$ et $b \geq 0$. Considérons une suite $(\tau(n))_n$ qui vérifie la relation suivante pour tout $n > 1$,*

$$\tau(n) = a\tau\left(\lceil\frac{n}{d}\rceil\right) + O(n^b).$$

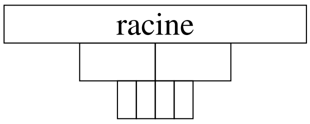
($\tau(0)$ et $\tau(1)$ sont quelconques)

Alors

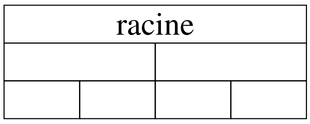
$$\tau(n) = \begin{cases} O(n^b) \text{ si } b > \log_d a & \text{(peu d'appel)} \\ O(n^b \log_d n) \text{ si } b = \log_d a & \text{(cas d'équilibre)} \\ O(n^{\log_d a}) \text{ si } b < \log_d a & \text{(trop d'appels)} \end{cases}$$

Dans le théorème précédent :
— a représente le nombre d'**a**ppels récursifs que produit un appel ;
— b représente la puissance de la complexité $O(n^b)$ du traitement d'un appel hors les appels récursifs. Ce traitement comprend à la fois la partie 'diviser' et la partie 'combiner' ;
— d représente le facteur de **d**ivision en sous-problèmes.

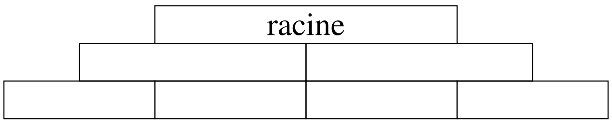
Intuitivement, le 'peu d'appel' correspond au fait que le coût est concentré dans la racine.



Intuitivement, le cas d'équilibre correspond au fait que le coût de chaque étage est le même :



Intuitivement, le 'trop d'appels' correspond au fait que le coût est concentré aux feuilles :



Démonstration.
On travaille à constante près. Donc on s'intéresse en fait à la suite suivante :

$$\tau(n) = a\tau\left(\lceil\frac{n}{d}\rceil\right) + n^b$$

et $\tau(1) = 1$.

$\boxed{\text{Quand } n = d^k}$ Supposons que n est une puissance de d, autrement dit que $n = d^k$. A constante près, la relation s'écrit

$$\tau(d^k) = a\tau(d^{k-1}) + d^{kb}$$

et $\tau(d^0) = 1$.

L'appel principal, de niveau k coûte d^{kb}, puis effectue a appels de niveau $k-1$. Chaque appel de niveau $k-1$ coûte $d^{(k-1)b}$ opérations élémentaires puis effectue des appels de niveau $k-2$, etc. Ainsi, si on compte toutes les opérations élémentaires effectuées à un certain niveau $k-\ell$ par un appel, on obtient $a^\ell d^{(k-\ell)b} = d^{kb}[d^{\log_d a - b}]^\ell$ opérations élémentaires.

En tout, on a donc :

$$\mathcal{P}(k) : \tau(d^k) = \Sigma_{\ell=0}^k d^{kb}[d^{\log_d a - b}]^\ell = d^{kb}\Sigma_{\ell=0}^k[\underbrace{d^{\log_d a - b}}_{\alpha}]^\ell = d^{kb}\Sigma_{\ell=0}^k \alpha^\ell.$$

On peut montrer que $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence sur k.

1. Si $b > \log_d a$, alors $0 < \alpha < 1$ et la série $\Sigma\alpha^\ell$ converge et $\tau(d^k) = O(d^{kb})$.
2. Si $b = \log_d a$, alors $\alpha = 1$, c'est à dire que les termes de la série valent 1 et $\tau(d^k) = (k+1)d^{kb}$.
3. Si $b < \log_d a$, alors $\alpha > 1$ et la série diverge. On fait apparaître une série convergente. On a $\Sigma_{\ell=0}^{k}\alpha^\ell = \alpha^k\Sigma_{\ell=0}^{k}(\frac{1}{\alpha})^\ell$. Comme la série $\Sigma(\frac{1}{\alpha})^\ell$ converge, on a

$$\tau(d^k) = O(d^{kb}\alpha^k) = O(d^{kb}[d^{\log_d a - b}]^k) = O(d^{k\log_d a}).$$

Cela termine la preuve quand n est de la forme d^k.

Remarque 8. *Il faut bien être à l'aise avec les logarithmes. Voici les points clefs :*
— $x = d^{log_d x}$ *pour toute base* $d > 1$ *et pour tout nombre* $x > 0$ *;*
— *tout se passe bien avec un exposant :* $x^t = \left(d^{log_d x}\right)^t = d^{t log_d x}$.

$\boxed{n \text{ quelconque}}$ Maintenant si n est quelconque, il est toujours encadré de la façon suivante $d^{log_d n} \leq n < d \times d^{log_d n}$.

Lemma 2. *La fonction* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *est croissante.*

Démonstration.
Pour le montrer, on montre par récurrence sur n que τ est croissante sur $\{1, \dots, n\}$.
— Pour $n = 1$, la propriété est triviale.
— Supposons pour un n donné que τ est croissante sur $\{1, \dots, n\}$ et montrons que τ est croissante sur $\{1, \dots, n+1\}$. $\tau(n+1) = a\tau\left(\lceil\frac{n+1}{d}\rceil\right) + O(n^b) \geq a\tau\left(\lceil\frac{n}{d}\rceil\right) + O(n^b)$ par hypothèse de récurrence (là on utilise que $d \geq 2$ pour être sûr que $\lceil\frac{n+1}{d}\rceil \leq n$). On a bien τ est croissante sur $\{1, \dots, n+1\}$.
— Par récurrence, on a montré que τ est croissante sur $\mathbb{N}$.

■

Ainsi on a : $\tau(n) \leq \tau(d^{\lceil log_d n\rceil})$. On conclut de la manière suivante. Par exemple, si $b > log_d a$, on a $\tau(n) \leq \tau(d^{\lceil log_d n\rceil}) = O(d^{\lceil log_d n\rceil b}) = O(dd^{\lfloor log_d n\rfloor}) \leq O(n^b)$

■