Agrégation de mathématiques, option informatique
Algorithmique
Autour des tris

23 janvier 2015

`Exercice 1` **`borne inférieure`**

Cormen et al. Algorithmique. 8.1, p. 177

Nous allons montrer que le nombre de comparaisons à effectuer au pire cas d'un tri par comparaison est $\Omega(n \log n)$ où n est le nombre d'éléments à trier.

1. Donner un algorithme de tri pour trier 3 éléments sous forme d'un arbre de décision binaire où les noeuds sont des comparaison de type $\boxed{T[i] < T[j]\,?}$.

2. Considérons maintenant un arbre de décision binaire pour trier n éléments. Donner une borne inférieure sur le nombre de feuilles.

3. En déduire que le nombre de comparaisons à effectuer au pire cas d'un tri par comparaison est $\Theta(n \log n)$.

4. Montrer que la complexité pire cas d'un algorithme qui calcule l'enveloppe convexe d'un ensemble de n points est $\Omega(n \log n)$.

`Exercice 2` **k`-ème élément d'un tableau`**

Cormen et al. Algorithmique. 9.3, p. 203

1. Adapter l'algorithme de tri rapide pour trouver le k-ème élément d'un tableau.

2. Évaluer sa complexité dans le pire des cas.

3. Montrer que si le pivotage assure que l'appel récursif se fait toujours sur un tableau de taille inférieure à cn, avec $c < 1$, alors l'algorithme est en $O(n)$.

Pour sélectionner le pivot, on utilise l'algorithme suivant.

— On découpe le tableau en $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ blocs de 5 éléments (on laisse de côté les éléments restants) ;

— on détermine les éléments médians m_k des blocs ci-dessus ;

— on détermine le $\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor$-ème éléments de la liste $m_1, \ldots, m_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$.

4. Montrer que le pivot est alors strictement supérieur à au moins $3\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor$ éléments de T et est inférieur ou égal à au moins $3\lfloor \frac{n+5}{10} \rfloor$ éléments.
En déduire un algorithme en $O(n)$.

`Exercice 3` — `Tri par tas`

Cormen et al. Algorithmique. chap. 6, p. 139

1. Exécuter le tri par tas sur

2	3	8	4	6

.

2. Montrer que l'on peut construire un tas à partir d'un tableau quelconque en $O(n)$ opérations où n est le nombre d'éléments.

`Exercice 4` — `Tri rapide`

Cormen et al. Algorithmique. chap. 7.3, p. 165 Le but est de montrer que l'espérance du nombre de comparaisons X de l'exécution du tri rapide version randomisée est $O(n \log n)$ où n est le nombre d'éléments à trier.

1. Écrire l'algorithme du tri rapide $QS(T)$ version randomisée.

On note les éléments à trier de la façon suivante : $s_1, \ldots, s_n$ avec $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Soit la variable aléatoire $X_{i,j}$ suivante :

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \text{ et } s_j \text{ sont comparés au cours de l'exécution de l'algorithme} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Exprimer X en fonction des $X_{i,j}$.

3. Exprimer X en fonction des $X_{i,j}$.

4. Montrer que

s_i et s_j qui sont comparés
ssi
s_i ou s_j est le premier élément parmi $\{s_i, \ldots, s_j\}$ à être pivot.

5. Soit $A = \{s_i, \ldots, s_j\}$. Soit $a \in A$. Montrer que pour tout sous-tableau T' qui contient les éléments de A, pour tout appel à $QS(T')$, la probabilité que a soit le premier élément parmi A à être pivot dans l'un des sous-appels récursifs depuis $QS(T')$ est $\frac{1}{card(A)}$.

indice : par récurrence sur $|T'|$.

6. Donner une expression de X_{ij}.

7. Donner une expression de X et conclure.

Autre lecture :

— Tri par paquets en $O(n)$ dans le cas moyen Cormen et al. Algorithmique. chap. 8.4, p. 185