Licence informatique

parcours recherche & innovation

2013–2014

FOND1 : LANGAGES FORMELS

examen final

Durée 2 h. Notes de cours et de TD autorisées. Les quatre parties sont indépendantes. Remarque : la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction, à la rigueur et la précision des argumentations.

Exercice 1

Complétez le tableau suivant. Si vous manquez de place pour les justifications, utilisez le verso.

affirmation	vrai	faux	justification
Si M est un langage rationnel et $L \cup M$ est rationnel alors L est rationnel.			
Si toute substitution d'un langage L par des langages rationnels est un langage rationnel alors le langage L est rationnel.			
$\left\{a^i b^j c^k \mid i > 10 > j > k > 0\right\}$ est un langage rationnel.			
L'ensemble $Rat(\Sigma)$ n'est pas dénombrable.			
Pour un mot et une grammaire algébrique donnés, le nombre de dérivations gauches est égal au nombre de dérivations droites.			
Dans la grammaire obtenue par construction à partir d'un automate à pile, toutes les variables sont accessibles.			
Dans un automate à pile qui accepte par état final, l'ensemble des états finaux ne peut pas être vide.			
Il existe une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas récursivement énumérable et dont le complémentaire n'est pas non plus récursivement énumérable.			

Exercice 2 On s'intéresse aux expressions LaTeX utilisant des indices et des exposants comme par exemple

`x_i`	x_i	`x_{i+1}`	x_{i+1}	`x^i`	x^i	`x^{i+1}`	x^{i+1}
`x_i^2`	x_i^2	`x^2_i`	x_i^2	`x^{i^2}`	x^{i^2}	`x^{i_n}`	x^{i_n}
`x_{i_j}`	x_{i_j}	`x_{i^2}`	x_{i^2}	`{x^2}^2`	${x^2}^2$	`x^{2^2}`	x^{2^2}
`x_{i_i}`	x_{i_i}	`{x_i}_i`	x_{ii}	`x_i_j`	erreur	`x_i^2_j`	erreur

On considère la grammaire G_1 suivante.

$$S \to a \mid \{S\} \mid S \,\hat{}\, S \mid S \,\_\, S$$

Question 2.1 Montrez que la grammaire G_1 est ambiguë et qu'elle engendre des expressions non autorisées en LaTeX.

On considère alors la grammaire G_2 suivante.

$$\begin{aligned} &S \to T \mid T \,\hat{}\, T \mid T \,\_\, T \mid T \,\_\, T \,\hat{}\, T \mid T \,\hat{}\, T \,\_\, T \\ &T \to a \mid \{S\} \end{aligned}$$

Question 2.2 Montrez que G_2 engendre `a^{a_a}_a` et dessiner un arbre de dérivation pour ce mot.

Question 2.3 Montrez que G_2 n'engendre pas le mot `a^a_a_a`.

Question 2.4 Montrez que G_2 n'est pas LL. Détailler les calculs de *Premiers* et *Suivants*.

Exercice 3 On définit trois opérations d'édition sur les mots : insertion d'une lettre, suppression d'une lettre, modification d'une lettre. Par exemple, on peut passer du mot *abacacb* au mot *aabaab* au moyen de 3 opérations : insertion d'un a au début et suppression des deux c, ou encore suppression du premier b, modification des deux c en b et a respectivement. La distance d'édition $d(u, v)$ entre deux mots u et v est le nombre minimal d'opérations d'édition qui permettent de passer de u à v.

Question 3.1 Combien vaut $d((abc)^3, (bca)^3)$? Justifiez votre réponse.

Si L est un langage sur Σ et k un entier, on note $L^{(k)} = \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in L, d(u, v) \leq k\}$.

Question 3.2 Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $L = \Sigma^* ab \Sigma^* ab \Sigma^*$.
Montrez que $L^{(1)} = \Sigma^* ab \Sigma^* (a + b) \Sigma^* \cup \Sigma^* (a + b) \Sigma^* ab \Sigma^*$.
Calculez l'automate minimal de $L^{(1)}$.

Question 3.3 Montrez que si L est reconnu par un automate (déterministe ou non) ayant n états, alors le langage $L^{(1)}$ peut être reconnu par un automate non déterministe ayant $\mathcal{O}(n)$ états.

Exercice 4

Question 4.1 Soit E un ensemble d'entiers naturels, et φ la fonction définie par

$$\varphi(n) = \sharp\{x \mid x < n \text{ et } x \in E\}$$

où le signe $\sharp$ dénote le cardinal d'un ensemble. Montrer que E est décidable si et seulement si φ est calculable.