Licence informatique

parcours recherche & innovation
2012–2013

LANGAGES FORMELS

examen final

Durée 2 h. Notes de cours et de TD autorisées. Les quatre parties sont indépendantes et d'importance similaire dans le barème. Remarque : la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction, à la rigueur et la précision des argumentations.

Exercice 1 On considère le langage L sur $\{a, b\}$ des mots possédant une unique occurrence de bbb.

Question 1.1 Donner un automate fini déterministe reconnaissant le langage L_1 des mots ne contenant *aucune* occurrence de bbb.

Question 1.2 Donner un automate fini déterministe reconnaissant le langage L_2 des mots contenant *exactement deux* occurrences de bbb (attention, $abbbb$ en fait partie).

Question 1.3 Donner un automate fini déterministe reconnaissant le langage $L_1 \cup L_2$.

Question 1.4 Donner un automate fini déterministe reconnaissant le langage L.

Question 1.5 Donner une expression rationnelle dénotant L.

Exercice 2 On considère la grammaire G suivante.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSbS \\ & & |aS \\ & & |\varepsilon \end{array}$$

Question 2.1 Quel est le langage L généré par G ? Donner une preuve détaillée.

Question 2.2 L est-il rationnel ? Prouvez-le.

Question 2.3 G est-elle ambiguë ? Prouvez-le.

Question 2.4 L est-il intrinsèquement ambigu ? Prouvez-le.

Question 2.5 Existe-t-il un entier k tel que G soit $LL(k)$?

Exercice 3 On note $\overline{L}$ l'image commutative d'un langage L, et on rappelle ici le théorème de Parikh vu en cours : pour tout langage algébrique A, il existe un langage rationnel R tel que $\overline{A} = \overline{R}$. On admettra de plus qu'il existe un algorithme qui construit le langage R étant donné le langage A.

Question 3.1 Étant donné un langage algébrique A sur l'alphabet $\{a, b\}$, existe-t-il un algorithme qui répond à la question suivante : existe-il un mot u de A tel que $|u|_a = |u|_b + 5$?

Question 3.2 Étant donné un langage algébrique A sur l'alphabet $\{a, b\}$, existe-t-il un algorithme qui répond à la question suivante : tout mot u de A vérifie $|u|_a = |u|_b + 5$?

Exercice 4 *Pour cet exercice, il n'est pas forcément judicieux d'utiliser le lemme de l'étoile.* On considère la suite des mots $w_n, n \geq 1$ sur $\{a, b\}$, définie par :

$$w_1 = a, w_2 = b, \forall n \geq 3 \; w_n = w_{n-1}w_{n-2}.$$

Ainsi, par exemple, $w_3 = ba$ et $w_4 = bab$.

Question 4.1 Montrer que, pour tout $n \geq 1$, w_n ne contient ni aa, ni bbb comme facteur.

Question 4.2 Le langage $\{w_n | n \geq 1\}$ est-il rationnel ?

Question 4.3 Le langage $\{w_n | n \geq 1\}$ est-il algébrique ?

Exercice 5 Soit t un arbre de $T(\Sigma)$ d'arité maximal p. On ajoute les symboles $\{1, \ldots, p\}$ à Σ, et on définit le langage des chemins $\pi(t)$ de t (qui est un langage de mots sur $\Sigma \cup \{1, \ldots, p\}$) par

$$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \Sigma_0 \\ \bigcup_{i=1}^{n} \{fiw | w \in \pi(t_i)\} & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

que l'on étend naturellement à un langage d'arbres L en posant

$$\pi(L) = \bigcup_{t \in L} \pi(t)$$

Question 5.1 Soit $\Sigma = \{a, b, f(,)\}$, et $t = f(f(a, a), b)$. Que vaut $\pi(t)$?

Si L est un langage d'arbres, on définit la clôture par les chemins de L comme

$$P(L) = \{t \in T(\Sigma) | \pi(t) \subseteq \pi(L)\}$$

Question 5.2 Soit $L = \{f(f(a, a), b), f(b, f(a, a))\}$. Que vaut $P(L)$?

Question 5.3 Montrer que si L est un langage d'arbres reconnaissable, alors $\pi(L)$ est un langage reconnaissable de mots.

Question 5.4 Montrer que si L est un langage d'arbres reconnaissable, alors $P(L)$ en est aussi un.

Question 5.5 Montrer qu'un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins (c-à-d. $L = P(L)$) si et seulement s'il est reconnu par un automate d'arbres descendant déterministe.