Approximation du théorème de Bayes généralisé pour les fonctions de croyance continues

Approximation of general Bayes theorem for continuous belief functions

Pierre-Emmanuel Doré Arnaud Martin
E3I2-EA3876/ENSIETA

2 rue François Verny, 29806 BREST Cedex 09
{Pierre-Emmanuel.Dore,Arnaud.Martin}@ensieta.fr

Résumé :

La théorie des fonctions de croyance est un formalisme mathématique permettant de modéliser les imperfections d'une source d'information d'une manière plus riche que les probabilités. L'un des outils les plus puissant réalisé à l'aide ce cadre de travail est le théorème de Bayes généralisé. Il nous permet de faire des inférences sans avoir de connaissance *a priori* sur l'occurrence de certains phénomènes. Toutefois, tel qu'il est formulé dans la littérature, il ne permet pas de travailler sur un espace de décision continu. Après avoir mis en lumière les limites de l'approche classique, nous avons adapté le principe de vraisemblance afin de pouvoir décider sur un cadre de discernement continu. Nous avons appliqué ces résultats afin de déterminer la plausibilité qu'une mesure effectuée dans un environnement incertain soit due à un paramètre donné.

Mots-clés :

Fonction de croyance continue, théorème de Bayes généralisé, environnement incertain, capteur.

Abstract:

The theory of belief functions is a mathematical framework used to model the imperfections of a source of information in a finnier way than probabilities. One of the most powerful tool built with this formalism is the generalized Bayes theorem. It allows us to define inference without using *a priori* knowledge on the occurrence of some events. Unfortunately, we cannot use it to take decision on a continuous framework. Hence, after having raised this problem, we have proposed a way to deal with it. We have applied the results obtained in order to describe the plausibility that a measure taken in an uncertain environment be generated by a particular parameter.

Keywords:

Continuous belief function, generalized Bayes theorem, uncertain environment, sensor.

1 Introduction

Depuis quelques temps, des travaux tentent de généraliser les approches sur les fonctions de croyance discrètes aux fonctions de croyance continues [17, 15]. Toutefois dans ces approches, l'objectif a souvent été de faire de la classification sur un cadre de discernement discret avec des données continues [12]. Aussi, même si à l'origine, l'incertitude se situait sur des données physiques continues, la décision s'effectuait sur des quantités discrètes. Des approches ont néanmoins été proposées pour faire de l'estimation de paramètres continus avec les fonctions de croyance [3, 1, 9]. Toutefois, certains aspects de ce problème ont pour l'instant été éludés. Il n'a pas été proposé d'approches du théorème de Bayes généralisé permettant de faire de l'estimation de paramètres. Hors, le fait de prendre des décisions sur des ensembles continus fait apparaître des difficultés qui n'existent pas lorsque que l'on travaille sur un cadre de discernement discret et fini. En utilisant l'approche suggérée par le théorème de Bayes généralisé, on en vient à générer des fonctions de croyance dont les éléments focaux semblent difficiles, voire impossibles à décrire. Dans cet article, après un bref rappel sur les fonctions de croyance discrètes, nous introduirons les notions nécessaires à l'énoncé du théorème de bayes généralisé. Puis, mettant en évidence ses limites dans un cadre continu, nous étudierons différentes méthodes pour surmonter ces difficultés. Enfin, pour illustrer nos propos, nous prendrons comme exemple le cas de l'estimation d'un paramètre à partir d'une mesure effectuée dans un environnement incertain.

2 Fonctions de croyance sur un espace produit et théorème de Bayes généralisé

La théorie des fonctions de croyance est un cadre mathématique pour décrire des informations incertaines. Plus riche que les probabilités, il permet entre autres de mettre une masse sur un ensemble indépendamment des sous-ensembles qu'ils le composent. Ceci à une grande importance du point vu sémantique et opérationnel.

2.1 Introduction aux fonctions de croyance

Lorsque l'on travaille avec des fonctions de croyance, le premier point est de définir l'espace sur lequel on s'exprime. Ce dernier est communément appelé cadre de discernement. C'est un ensemble fini d'éléments disjoints deux à deux noté Ω. L'ensemble des parties de Ω est noté 2^{Ω}. Par la suite, pour caractériser une information sur ce cadre de discernement, on définit une fonction de croyance. Une fonction de masse est une application m^{Ω} de 2^{Ω} dans $[0,1]$ qui satisfait la condition de normalisation $\sum\limits_{A\subseteq\Omega} m^{\Omega}(A) = 1$. On appelle masse élémentaire de A la valeur $m^{\Omega}(A)$ avec $A \subseteq \Omega$. Si l'on sait qu'une hypothèse h est vraie, on peut noter la fonction de masse $m^{\Omega}[h]$. Un ensemble A appartenant à 2^{Ω} est un élément focal de m^{Ω} si sa masse élémentaire est strictement positive. On dit d'une fonction de masse qui n'a qu'un seul élément focal qu'elle est *catégorique*. On la note m^{Ω}_{D} où D est l'élément focal de la fonction. Si cet élément est Ω, le cadre de discernement, elle est dite *vide*. Une fonction de masse dont les éléments focaux sont emboités est dite *consonante*.

D'une fonction de masse m^{Ω} découle pour tout $X \subseteq \Omega$ l'expression des fonctions de croyance suivantes :

– fonction de crédibilité :

$$bel^{\Omega}(X) = \sum_{A\subseteq X, A\neq\emptyset} m^{\Omega}(A) \qquad (1)$$

– fonction de plausibilité :

$$pl^{\Omega}(X) = \sum_{A\subseteq\Omega, A\cap X\neq\emptyset} m^{\Omega}(A) \qquad (2)$$

– fonction de communalité :

$$q^{\Omega}(X) = \sum_{X\subseteq A} m^{\Omega}(A) \qquad (3)$$

Pour fusionner les avis des deux sources d'information, on peut utiliser la règle de combinaison conjonctive. Soit deux fonctions de masse m^{Ω}_1 et m^{Ω}_2, la fonction de masse qui résulte de leur combinaison conjonctive notée $m^{\Omega}_1 \circledcirc m^{\Omega}_2 = m^{\Omega}_{1\circledcirc 2}$ est donnée par la relation :

$$m^{\Omega}_{1\circledcirc 2}(A) = \sum_{X\cap Y=A} m^{\Omega}_1(X)\, m^{\Omega}_2(Y), \forall A\subseteq\Omega \qquad (4)$$

On peut exprimer cette égalité plus simplement avec les fonctions de communalité :

$$q^{\Omega}_{1\circledcirc 2}(A) = q^{\Omega}_1(A)\, q^{\Omega}_2(A), \forall A\subseteq\Omega \qquad (5)$$

Supposons que plusieurs fonctions de croyance puissent caractériser une même source d'information. Le principe de moindre engagement stipule que l'on doive choisir celle qui implique le moins d'engagement afin de ne pas présumer d'une information que l'on ne possède pas. Pour caractériser cet engagement, cela présuppose l'existence d'une relation d'ordre entre les fonctions de croyance. Parmi les plus utilisées figurent celle suivant la plausibilité et celle suivant la communalité :

$$\left(\forall A\subseteq\Omega, pl^{\Omega}_1(A) \leqslant pl^{\Omega}_2(A)\right) \Leftrightarrow \left(m^{\Omega}_1 \sqsubseteq_{pl} m^{\Omega}_2\right) \qquad (6)$$

$$\left(\forall A\subseteq\Omega, q^{\Omega}_1(A) \leqslant q^{\Omega}_2(A)\right) \Leftrightarrow \left(m^{\Omega}_1 \sqsubseteq_{q} m^{\Omega}_2\right) \qquad (7)$$

Bien souvent, on a besoin d'exprimer nos croyances sur plusieurs cadres de discernements simultanément. Par exemple, on peut avoir des croyances sur la vitesse d'un véhicule en fonction de sa nature. Nous allons donc introduire la notion de croyance sur un espace produit et les résultats et concepts qui en découlent, notamment le théorème de Bayes généralisé.

2.2 Notions liées aux espaces produits

Dans cette partie, nous allons utiliser les notations présentées dans [11]. Notons la fonction de masse ayant pour cadre discernement l'espace produit $\Omega \times \Theta$, $m^{\Omega\times\Theta}$. Bien souvent, les fonctions de croyance dont nous disposons ne sont pas décrites dans ces espaces produits. On va alors devoir définir quatre types de transfert de masses.

Définition 1 (Marginalisation)**.** Soit une fonction de masse sur Ω. On appelle marginalisation le transfert de masse sur Ω tel que pour tout A dans Ω :

$$m^{\Omega\times\Theta\downarrow\Omega}(A) = \sum_{\{B\subseteq\Omega\times\Theta | Proj(B\downarrow\Omega)=A\}} m^{\Omega\times\Theta}(B) \tag{8}$$

où $Proj\,(B\downarrow\Omega)$ est la projection de B sur Ω.

Définition 2 (Extension à vide)**.** Soit une fonction de masse sur Ω, m^{Ω}. Soit l'ensemble des fonctions de masse sur $\Omega \times \Theta$ dont la marginalisation sur Ω est m^{Ω}. On appelle extension à vide la fonction de masse de cet ensemble de moindre engagement au sens de la communalité. Elle est définie par :

$$m^{\Omega\uparrow\Omega\times\Theta}(B) = \begin{cases} m^{\Omega}(A) & \text{si } B = A\times\Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

Dans la pratique, si on exprime une opinion sur Ω et que l'on en vient à faire des hypothèses sur Θ, on a besoin d'exprimer le conditionnement d'une fonction de masse.

Définition 3 (Conditionnement)**.** Soit une fonction de masse $m^{\Omega\times\Theta}$. On apprend par la suite que la condition D dans Θ est vérifiée. On peut alors appliquer le conditionnement suivant.

$$m^{\Omega}[D] = \left(m^{\Omega\times\Theta} \circledcirc m_D^{\Theta\uparrow\Omega\times\Theta}\right)^{\downarrow\Omega} \tag{10}$$

Réciproquement, on peut vouloir déconditionner une fonction de masse.

Définition 4 (Déconditionnement)**.**

$$m^{\Omega}[D]^{\Uparrow\Omega\times\Theta}\left(A\times D \cup \Omega\times\overline{D}\right) = m^{\Omega}[D](A) \tag{11}$$

Ces transformations vérifient le principe de moindre engagement.

2.3 Théorème de Bayes généralisé

En utilisant les outils présentés précédemment on peut obtenir le théorème de Bayes généralisé. En effet, supposons d'une part que nous disposions de modèles pour décrire la réponse d'un système sous certaines hypothèses $m^{\Omega}[\theta_i]$, θ_i appartenant à Θ. De plus, supposons d'une autre part que l'on ait la certitude que $X \subset \Omega$ soit vraie, on peut modéliser cette information par une fonction de masse catégorique m_X^{Ω}. Ainsi, l'intuition nous pousse à combiner conjectivement ces sources d'informations. Pour se faire, il nous faut réaliser un déconditionnement et une extension à vide. Au final, pour récupérer *a posteriori* une fonction de masse sur l'espace des hypothèses de modélisation, il faut appliquer une marginalisation. Ces transformations se résument par l'égalité suivante :

$$m^{\Theta}[X] = \left(\underset{i\in[\![1,n]\!]}{\circledcirc} m^{\Omega}[\theta_i]^{\Uparrow\Omega\times\Theta} \circledcirc m_X^{\Omega\uparrow\Omega\times\Theta}\right)^{\downarrow\Theta} \tag{12}$$

On démontre à partir de là l'une des formulations du théorème de Bayes généralisé [16] cidessous présentée.

Théorème 1. ***Théorème de Bayes généralisé*** *Soit deux cadres de discernement Θ et Ω. Supposons que l'on connaisse $m^{\Omega}[\theta_i]$ pour tout $\theta_i \subseteq \Theta$. Si l'on sait avec certitude que la condition X est vérifiée ($X \subseteq \Omega$), on montre que l'on peut obtenir la fonction de masse $m^{\Theta}[X]$ grâce à la relation :*

$$m^{\Theta}[X](A) = \prod_{\theta_i\in A} pl^{\Omega}[\theta_i](X)\cdot \prod_{\theta_i\in\overline{A}}\left(1 - pl^{\Omega}[\theta_i](X)\right) \tag{13}$$

On remarque [14] que grâce à cette relation on peut en déduire l'égalité suivante :

$$pl^{\Theta}[X](A) = 1 - \prod_{\theta_i \in A} \left(1 - pl^{\Omega}[\theta_i](X)\right) \tag{14}$$

En posant :

$$pl^{\Omega}[A](X) = 1 - \prod_{\theta_i \in A} \left(1 - pl^{\Omega}[\theta_i](X)\right) \tag{15}$$

Il en découle le principe de vraisemblance dans le cadre des fonctions de croyance :

$$pl^{\Theta}[X](A) = pl^{\Omega}[A](X) \tag{16}$$

Ainsi, la fonction de vraisemblance apparaît être égale à la fonction de plausibilité. Selon ce principe, la vraisemblance de l'hypothèse A sachant que l'hypothèse X est vraie est égale á la vraisemblance de X sachant que l'hypothèse A est vraie. Dans cette approche, le cadre de discernement, Θ est discret. On se rend compte que lorsque l'on considère un cadre de décision final continu, notre relation n'est pas applicable directement de manière triviale. De plus, l'ensemble des éléments focaux générés à l'issue de cette inférence est loin d'être facile à décrire. Nous allons donc dans la suite proposer des stratégies pour éviter cet écueil.

3 Une approche continue pour les inférences crédibilistes

Utiliser un indice pour représenter l'ensemble des éléments focaux d'une fonction de croyance est pratique lorsque l'on veut les manipuler de manière efficace. Dans cette partie, nous allons commencer par présenter une approche de la notion de fonction de croyance continue sur des réels fondée sur la définition d'une fonction décrivant l'ensemble des éléments focaux. Ceci reprend les travaux présentés par [7, 6, 5].

3.1 Introduction aux fonctions de croyance continues

On cherche à caractériser une croyance sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ à l'aide d'une mesure de probabilité $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$. L'ensemble des éléments focaux associés à cette croyance est noté $\mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right)$. Si on peut lui associer une application f^I surjective dite fonction indice telle que :

$$\begin{array}{llll} f^I : & I \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^l\right) & \longrightarrow & \mathcal{F}\left(\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}\right) \\ & y & \longmapsto & f^I(y) \end{array}$$

On peut considérer que $\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ est une mesure positive sur l'espace mesurable $(I, \mathcal{B}(I))$ qui vérifie la condition de normalisation $\int_I d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \leqslant 1$. Si pour tout A dans $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$, les ensembles définis ci-dessous sont des boréliens :

$$\begin{aligned} F_{\subseteq A} &= \{y \in I | f^I(y) \subseteq A\} \\ F_{\cap A} &= \{y \in I | \left(f^I(y) \cap A\right) \neq \varnothing\} \\ F_{\supseteq A} &= \{y \in I | A \subseteq f^I(y)\} \end{aligned} \tag{17}$$

On appelle la mesure positive associée *mesure crédale* et on peut définir des fonctions de croyance telles que pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right)$:

$$\begin{aligned} bel^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) &= \int_{F_{\subseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \\ pl^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) &= \int_{F_{\cap A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \\ q^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) &= \int_{F_{\supseteq A}} d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y) \end{aligned} \tag{18}$$

On note que l, la dimension de I (l'espace d'indices), ne dépend pas de n, la dimension de l'espace sur lequel on exprime une croyance. Par exemple [15] propose d'utiliser des parties de $\mathbb{R}^2$ pour décrire les éléments focaux de croyance exprimée sur $\mathbb{R}$ alors que [2] utilisent un espace d'indices de dimension 1 pour décrire les éléments focaux d'une fonction de croyance gaussienne sur $\mathbb{R}^n$. Une règle de combinaison souvent utilisée est la règle conjonctive qui est aussi valide dans ce formalisme. On retrouve alors une propriété déjà connue dans le cas discret. Soit $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ et $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ deux mesures crédales, lorsqu'on les combine en utilisant la règle de combinaison conjonctive, on obtient une mesure crédale $\mu_{1 \circledcap 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ qui vérifie l'égalité :

$$q_{1 \circledcap 2}^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) = q_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \cdot q_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(A) \tag{19}$$

On peut aussi démontrer que pour une même croyance, il existe plusieurs façons de décrire l'ensemble des éléments focaux. Soit f^{I_1} et f^{I_2}, deux fonctions indices associées aux mesures crédales $\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$ et $\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}$. Supposons φ, une fonction de changement de variable telle que $\varphi(y_1) = y_2$ implique $f^{I_1}(y_1) = f^{I_2}(y_2)$. Ces mesures crédales sont identiques si :

$$d\mu_1^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(y_1) = |det(\varphi'(y_1))| \, d\mu_2^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\varphi(y_1)) \tag{20}$$

La question est souvent de savoir comment créer une fonction de croyance. On peut supposer que l'on connaît une probabilité décrivant le phénomène. Selon la manière dont cette probabilité est considérée, on peut proposer plusieurs façons de générer une fonction de croyance à partir d'elle [5]. La première, dérivant de la théorie des possibilités consiste à appliquer le principe de maximum de nécessité [8, 10]. Elle présuppose que la probabilité P (de densité f_d) que l'on manipule est objective. Les éléments focaux d'une telle fonction de croyance sont les α-coupes de la densité de probabilité notées $f_{cs}^I(\alpha)$. On a les relations :

$$pl^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(x) = 1 - P\left(f_{cs}^I(f_d(x))\right) \tag{21}$$

i.e. :

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\alpha) = \alpha d\mathcal{V}(\alpha) \tag{22}$$

Où $\mathcal{V}([\alpha, \alpha_{\max}]) = \lambda\left(f_{cs}^I(\alpha)\right)$ et λ est la mesure de Lebesgue.

La deuxième dérive d'une idée proposée par Ph. Smets [15]. Elle consiste à considérer que la source à l'origine de la probabilité dont on dispose modélise son information en représentant son problème sur des ensembles mais prend ses décisions sur des singletons, répartissant les masses des ensembles sur des points. Cette transformation, appelée transformation pignistique, produit une probabilité pignistique souvent notée $BetP$ (sa densité est notée $betf$) [13, 5]. Pour une densité de probabilité donnée, il existe une infinité de fonctions de croyance. Cet ensemble est noté $\mathscr{B}Iso(BetP)$. L'enjeu est de choisir une fonction dans cet ensemble. On considère souvent dans ce cas la fonction de moindre engagement au sens de la communalité [15, 18, 6]. Cette dernière, dont les éléments focaux sont les α-coupes de $betf$, vérifie :

$$d\mu^{\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)}(\alpha) = \lambda\left(f_{cs}^I(\alpha)\right) d\lambda(\alpha) \tag{23}$$

Ceci constitue les outils de base dont nous disposons pour construire des fonctions de croyances.

3.2 Une approche possibiliste du principe de vraisemblance

Comme nous avons pu le constater dans la section 2, il est difficile d'appliquer directement les résultats du théorème de Bayes généralisé afin de réaliser une inférence lorsque l'on travaille avec les fonctions de croyance continues. Aussi, nous devons mettre en œuvre des stratégies afin de faciliter le calcul d'une fonction de croyance qui représenterait l'information mise à jour après l'arrivée de nouvelles données. Supposons un espace cartésiens $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ où $\mathcal{X}$ est par exemple l'espace des paramètres et $\mathcal{Y}$ est l'espace des mesures. Supposons que l'on connaisse la plausibilité d'avoir une mesure y appartenant à un ensemble Y de $\mathcal{Y}$ sachant que le paramètre x qui caractérise les observations possibles appartient à X, un sous-ensemble de $\mathcal{X}$. On va se retrouver en présence d'une famille de fonctions de croyance qui va caractériser la plausibilité d'observer une mesure donnée pour un paramètre fixé. La question est de savoir si l'on est capable de caractériser la plausibilité qu'une la mesure y donnée par un capteur soit due à un paramètre x. Pour caractériser cette plausibilité, on peut utiliser le principe de vraisemblance. Ainsi, au final il faut connaître $pl^{\mathcal{Y}}[X](Y)$. Typiquement, cette plausibilité peut-être caractérisée pour la famille de fonctions de croyance dont les plausibilités sont dans l'ensemble $\left(pl^{\mathcal{Y}}[x]\right)_{x \in X}$. On peut réutiliser l'approche préconisée dans [1] et choisir la fonction de plus grand engagement au sens de la plausibilité qui domine cet ensemble.

On a alors l'égalité suivante :

$$pl^{\mathcal{X}}\left[Y\right](X)=pl^{\mathcal{Y}}\left[X\right](Y)=\max_{x\in X}\left(pl^{\mathcal{Y}}\left[x\right](Y)\right) \tag{24}$$

On remarque que l'on obtient alors la méthode utilisée dans la théorie des possibilités pour mettre à jour l'information. Cette approche, même si elle a le mérite de fonctionner, semble ne pas tirer pleinement partie de la richesse du formalisme des fonctions de croyance pour réaliser une inférence, notamment parce qu'elle réduit une famille de fonctions de croyance à une fonction de croyance consonante avant même d'essayer d'appliquer les processus de déconditionnement, d'extension à vide et de marginalisation. Dans la sous-partie qui suit, nous allons proposer une méthode pour pallier à ce défaut.

3.3 Une approche bayésienne du principe de vraisemblance

Dans le cadre discret, on peut caractériser une inférence en utilisant le principe de vraisemblance. Ce principe est lié au théorème de Bayes généralisé [14]. On peut réécrire l'équation (14) afin d'exprimer des croyances sur un cadre de discernement continu. L'idée est de passer de l'expression d'un produit que l'on ne sait pas calculer à celle de l'intégrale d'un logarithme que l'on peut exprimer analytiquement. On obtient ainsi :

$$pl^{\mathcal{Y}}\left[X\right](Y) = 1-exp\left(\int_X ln\left(1-pl^{\mathcal{Y}}\left[x\right](Y)\right)dx\right) \tag{25}$$

Ceci n'a pas résolu le problème de la description des éléments focaux, toutefois cette astuce nous permet de caractériser la plausibilité des évènements qui nous intéresse. Comme nous l'illustrerons par la suite, même s'il ne nous faut considérer au final que la fonction contour de notre fonction de plausibilité, cette approche ne se réduira pas systématiquement à l'approche présentée précédemment.

4 Application à l'estimation d'état

Dans notre cas, nous voulons remonter, grâce à des mesures, aux valeurs décrivant un phénomène physique, en supposant que ces mesures dépendent de l'environnement dans lequel elles sont prises et qui se trouve être incertain.

4.1 Définition du problème

Soit un vecteur d'état x qui décrit le système observé et un vecteur d'observation y. On suppose l'existence d'un vecteur de paramètre ν dépendant d'un environnement incertain. On décide dans notre cas que h, la fonction d'observation telle que $h(x,\nu)=y$, est inversible. Un choix possible pour la fonction h est :

$$\begin{aligned} h:\ \mathcal{X}\times\mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ (x,\nu) &\longmapsto \frac{Po}{1+x^2}\cdot e^{-\nu x}=y \end{aligned} \tag{26}$$

On peut interpréter cette équation comme étant la perte en puissance d'un signal en fonction de la distance x du récepteur à la source en prenant en compte la dispersion géométrique de la puissance et le cœfficient d'affaiblissement du signal ν lié aux pertes engendrées par la propagation d'une onde dans un milieu homogène. L'objectif est de remonter à une estimation du vecteur d'état, c'est-à-dire la distance entre la source et le récepteur x, connaissant la puissance d'émission de la source, une mesure de puissance y au niveau du récepteur et l'ensemble auquel appartient le paramètre ν ($\nu\in[\nu_1,\nu_2]$). Le bruit de mesure du capteur est modélisé par un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

4.2 Application des outils présentés

Pour modéliser le bruit du capteur, on suppose un bruit blanc gaussien. On peut donc associer à ce capteur une densité de probabilité et une fonction de croyance vérifiant le principe du maximum de nécessité, $pl\left[x,\nu\right](y)$. Cette fonction décrit la plausibilité de mesurer un signal d'une puissance y sachant que la source du signal est à une distance x et que le cœfficient d'atténuation de ce signal est ν. Appliquant le principe de vraisemblance selon une approche possibiliste ou bayésienne, on est alors capable de caractériser une information sur la distance entre la source et la capteur connaissant une mesure y et sachant que le paramètre caractérisant l'environnement ν appartient à un intervalle donné $[\nu_1, \nu_2]$. Les fonctions contours résultantes de ces deux approches sont tracées dans les figures 1 et 2 (en rouge la méthode possibiliste, en bleu celle dérivée des fonctions de croyance).

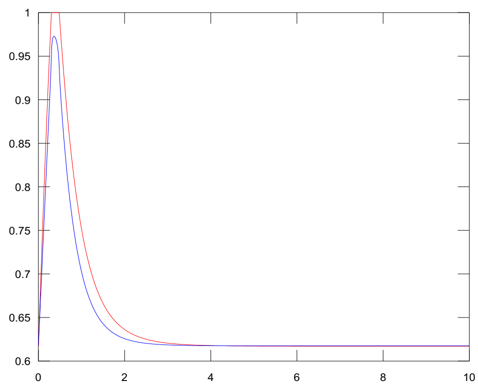

Figure 1 – $pl\,[y, \nu \in [1,2]]\,(x)$

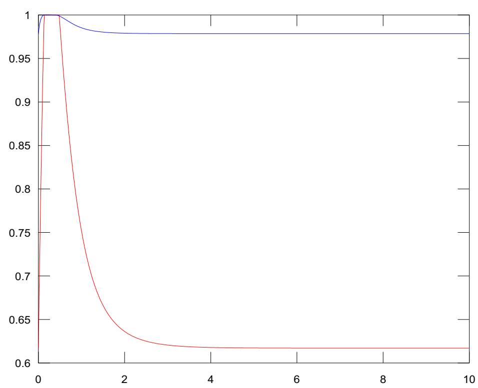

Figure 2 – $pl\,[y, \nu \in [1,5]]\,(x)$

A priori, le comportement obtenu à l'aide de la méthode dérivant du théorème de Bayes généralisé semble plus satisfaisante. En effet, lorsque l'incertitude sur le paramètre lié à l'environnement est faible, la méthode liée aux fonctions de croyance est capable de discriminer une position plausible. À l'inverse, lorsque l'incertitude est grande sur le paramètre lié à l'environnement et que la prudence semble être de mise, la méthode issue de la théorie des possibilités discrimine plus la décision que celle issue des fonctions de croyance. On remarque que la méthode possibiliste résume les meilleurs cas possibles de la théorie des probabilité pour tous les ν potentiel. Des travaux complémentaires semblent nécessaires afin de mieux caractériser l'inférence découlant du théorème de Bayes généralisé, elle semble plus appropriée pour modéliser la réponse d'une source devant décider sur un espace continu dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance.

5 Conclusion

La théorie des fonctions de croyance appliquée à des cadres de discernement continus est une thématique riche, offrant beaucoup de possibilités, mais soulevant aussi de nombreux problèmes d'ordre applicatifs. Si nous avons vu dans notre travail qu'elle induit de nouvelles techniques d'inférence, elle soulève aussi beaucoup de questions. En effet, quel est l'objet que l'on manipule après l'application d'une approche bayésienne du principe de vraisemblance. Est-ce vraiment toujours une fonction de croyance dans la mesure où nous sommes incapables d'en décrire les éléments focaux ? Ce n'est en tout cas pas une fonction de possibilité puisque les éléments focaux, si l'on pouvait tous les décrire, ne sauraient pas tous être emboîtés. Une chose est sûre, des travaux complémentaires seront nécessaires afin d'analyser l'objet ainsi créé. Des tentatives de formalisation en utilisant la théorie des capacités [4] sont étudiées.

Références

[1] A. Aregui and T. Denœux. Constructing consonant belief functions from sample data using confidence sets of pignistic probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, 49(3) :575–594, 2008.

[2] F. Caron, B. Ristic, E. Duflos, and P. Vanheeghe. Least committed basic belief density induced by a multivariate Gaussian : formulation with applications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(2) :419–436, 2008.

[3] F. Caron, Ph. Smets, E. Duflos, and P. Vanheeghe. Multisensor data fusion in the frame of the TBM on reals. Application to land vehicle positioning. 2, 2005.

[4] G. Choquet. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, 5(131-295) :54, 1953.

[5] P.-E. Doré and Martin. About using beliefs induced by probabilities. *Workshop on belief function theory, Brest*, 2010.

[6] P.-E. Doré, A. Martin, and A. Khenchaf. Constructing consonant belief function induced by a multimodal probability. *COGnitive systems with Interractive Sensors (COGIS 2009)*, 2009.

[7] P.-E. Doré, A. Martin, and A. Khenchaf. Construction d'une fonction de masse consonante associée à une probabilité multimodale. *Actes des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*, 2009.

[8] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, and H. Prade. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable computing*, 10(4) :273–297, 2004.

[9] A. Kallel, S. Le Hégarat-Mascle, L. Hubert-Moy, and C. Ottlé. Fusion of vegetation indices using continuous belief functions and cautious-adaptive combination rule. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(5) :1499, 2008.

[10] G. Mauris. Transformation of bimodal probability distributions into possibility distributions. *Instrumentation and measurement, IEEE Transactions on*, Accepted for inclusion in a future issue of this journal.

[11] D. Mercier, B. Quost, and T. Denœux. Refined modeling of sensor reliability in the belief function framework using contextual discounting. *Information Fusion*, 9(2) :246–258, 2008.

[12] B. Ristic and Ph. Smets. Belief function theory on the continuous space with an application to model based classification. pages 4–9, 2004.

[13] Ph. Smets. Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 5 :29–39, 1990.

[14] Ph. Smets. Belief functions : the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9 :1–1, 1993.

[15] Ph. Smets. Belief functions on real numbers. *International journal of approximate reasoning*, 40(3) :181–223, 2005.

[16] Ph. Smets and R. Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66(2) :191–234, 1994.

[17] T.M. Strat. Continuous belief functions for evidential reasoning. *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence, University of Texas at Austin*, 1984.

[18] J.M. Vannobel. Continuous belief functions : singletons plausibility function in conjunctive and disjunctive combination operations of consonant bbds. *Workshop on belief function theory, Brest*, 2010.