TD 8 : Réseaux de flots

1 Application du cours -Algorithme de Ford-Fulkerson

Rappels.

Un *réseau* est un graphe orienté $G = (S, A)$ possédant une source $s \in S$ et une *cible* $t \in S$, muni d'une fonction de pondération $c : A \to \mathbb{N}$ appelée *capacité*. Par convention, on étend souvent c à $S \times S$ en posant $(u, v) \notin A \implies c(u, v) = 0$. Étant donné un réseau, un *flot* $f : A \to \mathbb{N}$ sur ce réseau est une fonction vérifiant $\forall (u, v) \in S,\ f(u, v) \leq c(u, v)$. Le *graphe résiduel* G_f d'un flot f est le graphe $G_f = (S, A_f)$ pondéré par c_f, où :

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{si } f(u,v) > 0 \\ -f(v,u) & \text{si } f(v,u) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 1 – Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson au réseau représenté par le graphe pondéré G_1. Identifier la coupure minimale associée et justifier de la terminaison de l'algorithme.

(a)

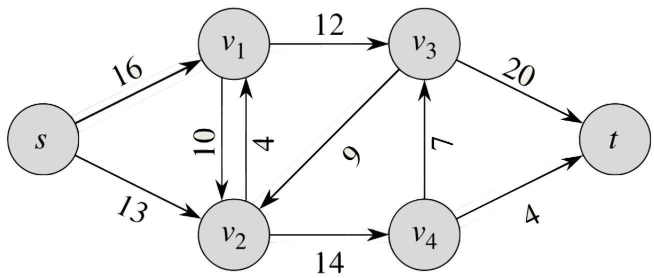
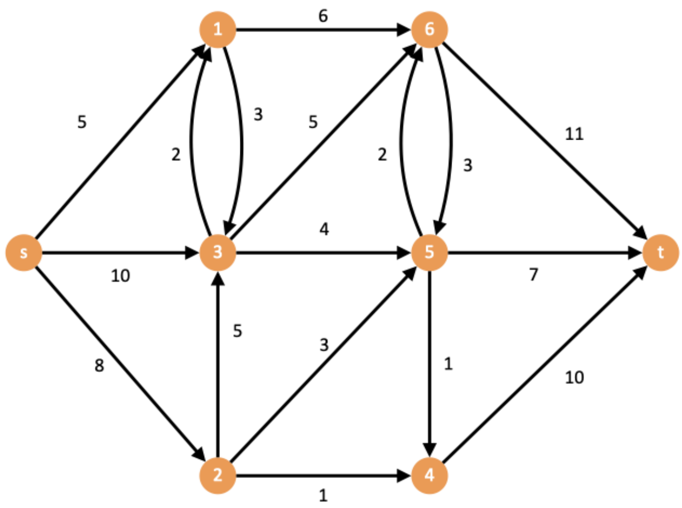


Figure 1 – Graphe exemple G_1

Question 2 – Montrer dans le cas général (poids entiers) que l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, et donner sa complexité dans le pire cas.

2 Canalisations pluviales

Le réseau ci-dessous décrit l'évacuation de l'eau pluviale de S vers T dans une région après un orage. Les nombres sur les arcs représentent les capacités d'eau pluviale des canalisations.



QUESTION 3 – Trouver le flot maximum et déterminer une coupe de capacité minimale.

QUESTION 4 – Le canal $(2, 3)$ est bouché. Quelle est la nouvelle valeur du flot maximum ?

On a réussi à déboucher le canal $(2, 3)$. On souhaite augmenter le flot et l'on envisage une expansion de la capacité de l'arc $(2, 5)$. On discute actuellement une augmentation de 1 unité ou, à un coût supplémentaire, de 2 unités.
QUESTION 5 – Quelle est votre recommandation ? Justifiez !

Retournons aux données initiales. Supposons à présent que Le flot total qui peut traverser le point 5 est limité à 6 unités.
QUESTION 6 – Transformez le réseau en forme standard (capacités uniquement sur les arcs) et trouvez le nouveau flot maximum.

3 Algorithme d'Edmonds-Karp

Une optimisation de la méthode de Ford-Fulkerson consiste à rechercher des chemins améliorants de *longueur* minimale (la longueur ne tient pas compte des pondérations). Cette variante constitue l'algorithme d'Edmonds-Karp.
QUESTION 7 – Expliquer comment implémenter l'algorithme d'Edmonds-Karp.

Question 8 – Appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp au graphe G_1.

Nous allons dans un premier temps montrer que si l'algorithme d'Edmonds-Karp est exécuté sur graphe $G = (S, A)$ de source s et de cible t, alors pour tous les sommets $v \in S \setminus \{s, t\}$, la distance de plus court chemin $\delta_f(s, v)$ dans le graphe résiduel G_f augmente de façon monotone avec chaque augmentation de flot. Nous allons pour cela procéder par l'absurde, en supposant qu'une diminution de distance est possible.

Question 9 – Soit f le flot juste avant la première itération qui diminue une certaine distance de plus court chemin, et soit f' le flot juste après. Soit v le sommet ayant le $\delta_{f'}(s, v)$ minimal dont la distance a été diminuée par l'augmentation, et u son prédécesseur sur le plus court chemin correspondant. Montrer que $(u, v) \notin G_f$ (G_f est le graphe résiduel).

Question 10 – En déduire que v ne peut pas exister.

On dit qu'un arc (u, v) d'un graphe résiduel G_f est critique sur un chemin améliorant p si la capacité résiduelle de p est la capacité résiduelle de (u, v).

Question 11 – Supposons que (u, v) devient critique à deux reprises durant l'exécution de l'algorithme. Montrer que, entre ces deux moments, la distance entre la source et u augmente au moins de 2.

Question 12 – Montrer que chacun des $|A|$ arcs peut devenir critique au plus $|S|/2 - 1$ fois.

Question 13 – Montrer que le nombre total d'augmentations de flot effectuées par l'algorithme d'Edmonds-Karp est en $O(|S| \cdot |A|)$.