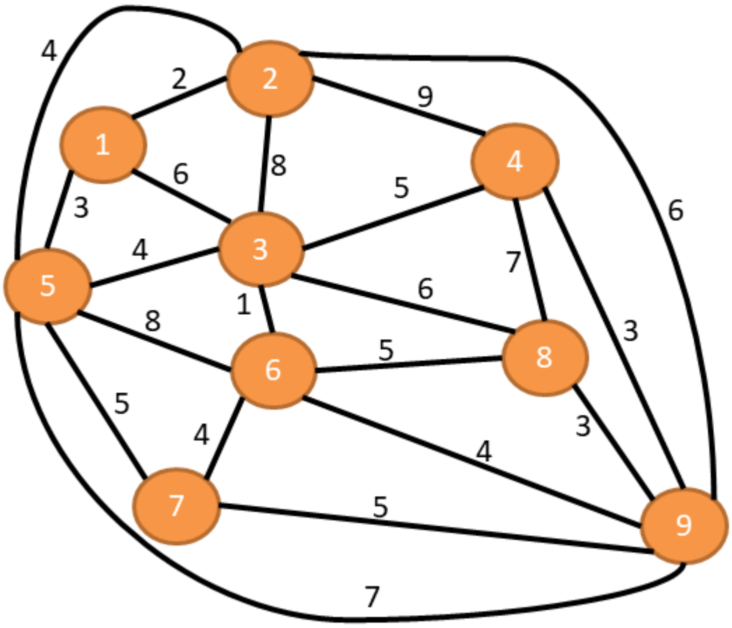
TD 4 :Arbre couvrant minimum : Prim

1 Algorithme de Prim

Fonction $\text{ACMP}\textsc{rim}(G, P, racine)$
    pour chaque $u \in S[G]$ **faire**
        $Q[u].cle \leftarrow \infty$ ▷ `Initialisation des clés en prenant les arrêtes de poids min issue de chaque sommet.`
        $Q[u].parent \leftarrow NULL$ ▷ `Initialisation de l'ACM. L'ACM est vu comme un liens vers son parent. Aucun sommet n'a de parent vers l'ACM.`
    $Q[racine].cle \leftarrow 0$ ▷ `On met à la racine du graphe la clé 0 pour que la file de priorité min, noté F, le sélectionne en premier.`
    $F \leftarrow [G]$ ▷ `Initialisation de la file de priorité min. Elle est implémentée avec un tas binomial basé sur la clé des sommets.`
    tant que $F \neq \emptyset$ **faire**
        $u \leftarrow EXTRAIRE\_MIN(F)$
        pour chaque $v \in Adj[u]$ **faire**
            si $v \in F$ et $P(u, v) < Q[v].cle$ **alors**
                $Q[v].parent \leftarrow u$
                $Q[v].cle \leftarrow P(u, v)$
                $DIMINUER\_CLE(v, P(u, v))$

Question 1 – A partir de l'algorithme de Prim ci-dessus, trouver la complexité de l'algorithme.

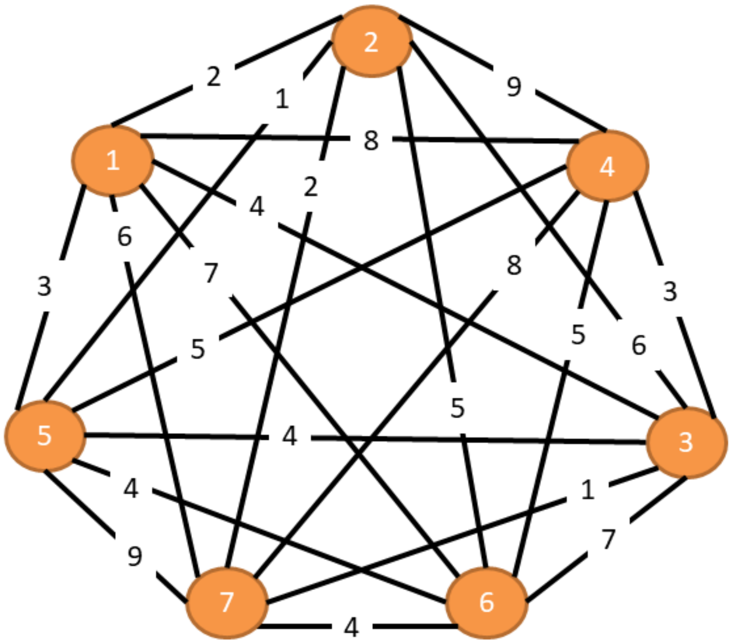


QUESTION 2 – Appliquer l'algorithme de Prim sur le graphe ci dessus. Vous ferez apparaître l'évolution du tas-binomiaux à chaque étape de l'algorithme.

QUESTION 3 – L'arbre couvrant de poids minimum est-il unique ?

QUESTION 4 – L'arbre obtenu à la question précédente fournit un unique chemin du sommet 1 vers tout autre sommet. Ces chemins sont-ils les plus courts chemins ?

2 Développement d'un réseau de transport en commun



Les noeuds du graphe ci-dessus représente des villes et les arrêtes la distance entre ces villes. Une société de transport en commun souhaite développer son réseau de bus entre ces villes. L'objectif pour cette compagnie est de créer de nouvelles lignes reliant les villes entre elles avec comme contrainte :
- De minimiser l'impact carbone entre deux villes. (plus les villes sont proche, moins l'impact carbone est important).
- Que toutes les villes soit connectées à ce réseaux, pour pouvoir aller d'une ville A à n'importe quelle ville B (sans que ca soit nécessairement le plus cours entre A et B).

Question 5 – Proposez une solution pour cette entreprise. Combien de ligne de bus seront créées avec votre solution ?

Question 6 – La société souhaite développer une ligne circulaire qui passe par toutes les villes. Proposez une heuristique permettant de créer un circuit entre ces villes sans passer deux fois par la même ville.
Mettez en avant les points forts et points faible de votre algorithme.

3 Arbre couvrant à goulot d'étranglement

Un arbre couvrant à goulot d'étranglement T d'un graphe non orienté G est un arbre couvrant de G dont le poids maximal d'une arête est minimum par rapport à l'ensemble des tous les arbres couvrants de G. On dira que la valeur de l'arbre couvrant à goulot d'étranglement est le poids de l'arête de poids maximal de T.

QUESTION 7 – Montrez qu'un arbre couvrant minimum est un arbre couvrant à goulot d'étranglement.

La question précédente montre que trouver un arbre couvrant à goulot d'étranglement n'est pas plus difficile que de trouver un arbre couvrant minimum. Dans les parties qui suivent, nous allons montrer qu'on peut en trouver un en temps linéaire.

QUESTION 8 – Donnez un algorithme à temps linéaire qui, à partir d'un graphe G et d'un entier b, détermine si la valeur de l'arbre couvrant à goulot d'étranglement est au plus égale à b.

QUESTION 9 – Utilisez l'algorithme de la question précédente comme sous-routine d'un algorithme à temps linéaire pour le problème de l'arbre couvrant à goulot d'étranglement.
Vous pouvez aussi utiliser un algorithme qui récupère le poids médian d'un groupe d'arrêtes en temps linéaire, et un autre algorithme qui contracte les noeuds connectés par des arrêtes d'un certain poids en temps O(A.lg(lg(S))).

4 Questions théoriques

QUESTION 10 – Étant donnés un graphe G et un arbre couvrant minimum T, on suppose que l'on diminue le poids de l'une des arêtes de T.
Montrer que T est encore un arbre couvrant minimum de G.

QUESTION 11 – Soit T un arbre couvrant minimum d'un graphe G, et soit L la liste triée des poids d'arêtes de T. Montrer l'unicité de L, i.e. pour tout autre arbre couvrant minimum T' de G, la liste L est également la liste triée des poids d'arête de T'.