# TD 9 : Programmation linéaire

22 novembre 2018

**Rappel:** l'algorithme du simplexe permet de résoudre itérativement le problème

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & v + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ \text{avec} & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ sont respectivement les ensembles d'indices de base et hors-base, et $v$ la valeur courante de la fonction à maximiser. L'algorithme s'écrit:

**Fonction** SIMPLEXE($\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, v, \mathcal{B}, \mathcal{N}$)
  **si** $\exists j_0 \in \mathcal{N}$ tel que $c_{j_0} > 0$ **alors**
    **si** $\exists i \in \mathcal{B}$ tel que $-a_{ij_0} < 0$ **alors**
      $i_0 \leftarrow \arg\min_i \{b_i / a_{ij_0}, -a_{ij_0} < 0\}$
      **return** SIMPLEXE( PIVOT(($\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $v$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$), $i_0$, $j_0$))
    **sinon**
      **return** $\infty$
  **sinon**
    **return** $v$

où PIVOT actualise $\mathcal{N}$ et $\mathcal{B}$ ($j_0$ sort de $\mathcal{N}$ et est remplacé par $i_0$), calcule les coefficients pour la nouvelle variable de base $j_0$ qui passe dans le membre de gauche, substitue dans les autres équations et dans la fonction objectif les occurrences de $x_{j_0}$.

## 1 Questions de cours

QUESTION 1 – Un problème linéaire peut-il avoir (justifier) :

- plusieurs solutions optimales ?
- aucune solution réalisable ?
- plusieurs solutions réalisables mais aucune solution optimale ?

## 2 Problème du barman

Un barman dispose des quantités d'alcool suivantes :

- 50cl de Whisky ;
- 50cl de Vermouth ;
- 100cl de Gin.


Il peut faire les cocktails suivants :

| Nom | Composition | Prix |
|---|---|---|
| Manhattan | 10cl de Whisky et 5cl de Vermouth | 5 € |
| Martini | 10cl de Gin et 5cl de Vermouth | 4 € |
| Pub special | 15cl de Gin et 10cl de Whisky | 6 € |

En supposant qu'il arrive à vendre tous les cocktails qu'il fabrique, il veut savoir quels cocktails il doit proposer pour maximiser son profit vu les stocks dont il dispose.

Question 2 – Écrire ce problème sous forme standard.

Question 3 – Le résoudre en utilisant l'algorithme du simplexe.

## 3 Mise en forme standard

On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Minimiser :} & & 2x - 3y & & \\ & & & & \\ x & + & y & = & 7 \\ x & - & y & \geq & 2 \end{array}\right.$$

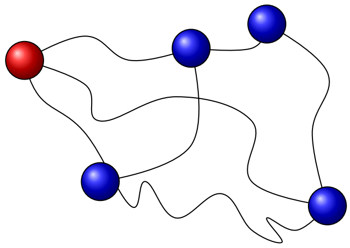
Question 4 – Écrire ce problème sous forme standard.

Question 5 – Sous la forme obtenue, la solution $(0, \ldots, 0)$ est-elle réalisable ?

Question 6 – Appliquer la procédure vue en cours pour décider si le problème admet une solution réalisable et si oui, en obtenir une.

*Hint:* vous devez tout d'abord définir le problème auxiliaire qui consiste à maximiner $(-x_0)$ (une nouvelle variable). Si sa solution optimale est différente de 0 alors le problème initial n'admet pas de solution réalisable. Sinon, se servir de cette solution pour en déduire une solution rélisable pour le problème initial.

## 4 Plus court chemin et programmation linéaire



QUESTION 7 – Montrer comment représenter le calcul du plus court chemin pour un couple de sommets sous la forme d'un problème de programmation linéaire.

QUESTION 8 – Prouver la correction de votre algorithme.