TD 8 : Flots

Jeudi 15 novembre 2018

Rappels. Un *réseau* est un graphe orienté $G = (S, A)$ possédant une source $s \in S$ et une *cible* $t \in S$, muni d'une fonction de pondération $c : A \to \mathbb{N}$ appelée *capacité*. Par convention, on étend souvent c à $S \times S$ en posant $(u, v) \notin A \implies c(u, v) = 0$. Étant donné un réseau, un *flot* $f : A \to \mathbb{N}$ sur ce réseau est une fonction vérifiant $\forall (u, v) \in S,\ f(u, v) \leq c(u, v)$. Le *graphe résiduel* G_f d'un flot f est le graphe $G_f = (S, A_f)$ pondéré par c_f, où :

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{si } f(u,v) > 0 \\ -f(v,u) & \text{si } f(v,u) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 Algorithme de Ford-Fulkerson

Question 1 – Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson au réseau représenté par le graphe pondéré G_1. Identifier la coupure minimale associée et justifier de la terminaison de l'algorithme.

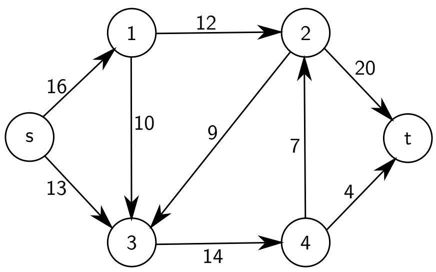


Fig. 1 : Graphe exemple G_1

Question 2 – Montrer dans le cas général (poids entiers) que l'algorithme de Ford-Fulkerson termine, et donner sa complexité dans le pire cas.

2 Algorithme d'Edmonds-Karp

Une optimisation de la méthode de Ford-Fulkerson consiste à rechercher des chemins améliorants de *longueur* minimale (la longueur ne tient pas compte des pondérations). Cette variante constitue l'algorithme d'Edmonds-Karp.

Question 3 – Expliquer comment implémenter l'algorithme d'Edmonds-Karp.

Question 4 – Appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp au graphe G_1.

Nous allons dans un premier temps montrer que si l'algorithme d'Edmonds-Karp est exécuté sur graphe $G = (S, A)$ de source s et de cible t, alors pour tous les sommets $v \in S \setminus \{s, t\}$, la distance de plus court chemin $\delta_f(s, v)$ dans le graphe résiduel G_f augmente de façon monotone avec chaque augmentation de flot. Nous allons pour cela procéder par l'absurde, en supposant qu'une diminution de distance est possible.

Question 5 – Soit f le flot juste avant la première itération qui diminue une certaine distance de plus court chemin, et soit f' le flot juste après. Soit v le sommet ayant le $\delta_{f'}(s, v)$ minimal dont la distance a été diminuée par l'augmentation, et u son prédécesseur sur le plus court chemin correspondant. Montrer que $(u, v) \notin G_f$ (G_f est le graphe résiduel).

Question 6 – En déduire que v ne peut pas exister.

On dit qu'un arc (u, v) d'un graphe résiduel G_f est critique sur un chemin améliorant p si la capacité résiduelle de p est la capacité résiduelle de (u, v).

Question 7 – Supposons que (u, v) devient critique à deux reprises durant l'exécution de l'algorithme. Montrer que, entre ces deux moments, la distance entre la source et u augmente au moins de 2.
Question 8 – Montrer que chacun des $|A|$ arcs peut devenir critique au plus $|S|/2 - 1$ fois.
Question 9 – Montrer que le nombre total d'augmentations de flot effectuées par l'algorithme d'Edmonds-Karp est en $O(|S| \cdot |A|)$.

3 Flot maximal avec capacité bornée des sommets

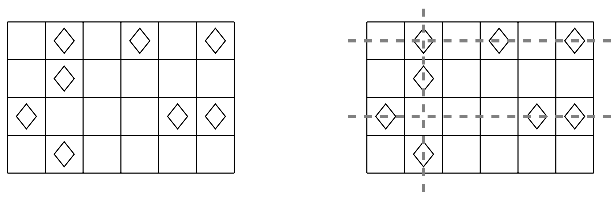
Une variante du problème de flots consiste à considérer un graphe où non seulement les arcs, mais aussi les sommets ont une capacité limitée.
Question 10 – Formaliser le problème.
Question 11 – Montrer que ce nouveau problème peut se réduire au problème de flots standard, sur un graphe convenablement choisi.

4 Théorème de König (source : SWERC 2012)

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Rappelons d'abord quelques notions.

- Une *couverture par sommets* de G est un ensemble de sommets C S tel que chaque arête de A est incidente à au moins un sommet de C.
- Une *couverture par sommets minimale* est une couverture par sommets de taille minimale.
- Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes $M \subseteq A$ qui n'ont pas de sommet en commun.
- Un *couplage maximal* est un couplage de taille maximale.
- Le graphe G est dit *biparti* si il existe une partition (U, V) de S tel que toute arête de A a une extrémité dans U et l'autre dans V.

Soit une grille rectangulaire de taille $n \times m$ dont certaines cases sont marquées—représentées ci-dessous par des diamants. On cherche à disposer un nombre minimal de robots, controllant chacun une ligne ou une colonne de la grille, afin de contrôler toutes les cases marquées. La figure de droite correspond à une solution pour l'instance du problème représentée sur la figure de gauche.



Question 12 – Proposer une réduction vers le problème de couverture minimale par sommets.
Question 13 – Montrer que dans un graphe biparti, la cardinalité minimale d'une couverture de sommets est égale au couplage maximal. (Il s'agit du Théorème de König.)