TD 4 : Graphes – Applications des parcours

04 Octobre 2018

1 Connexité et cycles

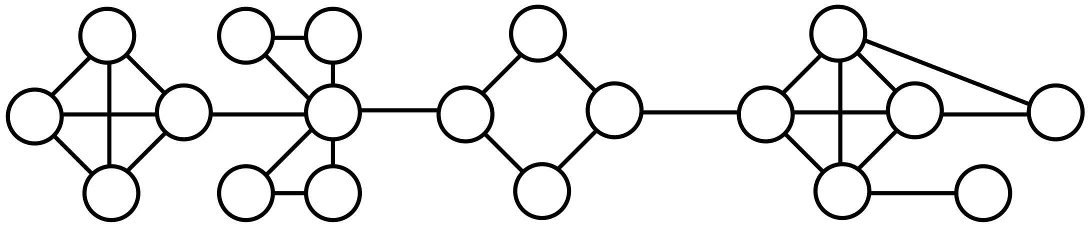
QUESTION 1 – Montrer que tout graphe connexe à n nœuds contient au moins $n-1$ arêtes. On retiendra également, sans le prouver, que tout graphe acyclique à n nœuds contient au plus $n-1$ arêtes.
QUESTION 2 – Donner un algorithme qui teste en $\mathcal{O}(|A|)$ la connexité d'un graphe non orienté $G = (S, A)$.
QUESTION 3 – Donner un algorithme qui teste en $\mathcal{O}(|S|)$ l'existence d'un cycle dans un graphe non orienté $G = (S, A)$, sans forcément en exhiber un.

2 Cycles eulériens

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté connexe. On appelle cycle *eulérien* un cycle empruntant une et une seule fois chaque arête de G.
QUESTION 4 – Montrer que G admet un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.
QUESTION 5 – Proposer un algorithme trouvant un cycle eulérien dans un graphe donné.

3 Séparabilité

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. On appelle *sommet d'articulation* de G un sommet dont la suppression rend G non connexe.
QUESTION 6 – Sur l'exemple ci-dessous, marquer les sommets d'articulations.



Question 7 – Soit π un arbre de parcours en profondeur de G. Soit r la racine de π. Énoncer et justifier une condition nécessaire et suffisante pour que r soit un sommet d'articulation.

Question 8 – Soit v un sommet de π, distinct de sa racine, donner une condition nécessaire et suffisante sur les arcs arrières partant des enfants de v ou de leurs descendants, pour que v soit un sommet d'articulation de G. Expliquer.

Question 9 – Déduire des questions précédentes un algorithme pour calculer tous les sommets d'articulations avec une complexité en $\mathcal{O}(|A|)$. Expliquer.

Question 10 – Illustrer ce calcul sur l'exemple précédent.

4 Tri topologique

Question 11 – Donner un tri topologique pour le graphe orienté suivant.