

TD 10 : Algorithmes gloutons (suite) et Programmation dynamique

Jeudi 30 novembre 2017

1 Prim et Kruskal

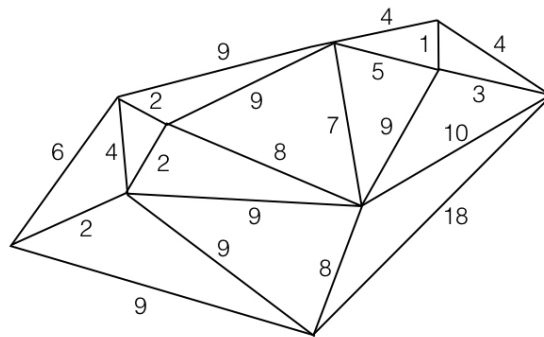


FIGURE 1 – Graphe exemple G

QUESTION 1 – Dérouler l'algorithme de Prim sur le graphe G .

QUESTION 2 – Dérouler l'algorithme de Kruskal sur le graphe G .

QUESTION 3 – Prouver la correction de l'algorithme de Prim dans le cas général. On prouvera préalablement le lemme suivant :

Lemme 1. *Supposons que X est un ensemble d'arêtes inclus dans un arbre de poids minimal. Soit $(V, S \setminus V)$ une coupe non traversée par X , et (u, v) l'arête de poids minimal traversant cette coupe. Alors il existe un arbre de poids minimal contenant $X \cup \{(u, v)\}$.*

2 Allocation de skis

On s'intéresse au problème d'allouer m paires de skis de longueurs s_1, \dots, s_m , respectivement, à n skieurs ($m \geq n$) de tailles h_1, \dots, h_n . On appelle *allocation* une fonction (injective) $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$; une allocation f est dite optimale lorsqu'elle minimise $w(f) = \sum_{k=1}^n |s_{f(k)} - h_k|$.

QUESTION 4 – Donner la complexité de la solution naïve qui consiste à explorer toutes les possibilités.

QUESTION 5 – Proposer une formule de récurrence pour une allocation optimale des skis. Indice : on pourra supposer que les longueurs des skis et les tailles des skieurs sont rangées dans l'ordre croissant.

QUESTION 6 – En déduire un algorithme efficace permettant de calculer la valeur optimale $w(f)$ et calculer sa complexité.

QUESTION 7 – Expliquer comment modifier l'algorithme pour qu'il renvoie également l'allocation optimale.

3 Triangulation de polygones

On considère dans cet exercice les polygones *convexes* du plan. Une triangulation d'un polygone est un ensemble de cordes (c'est-à-dire de segments reliant deux sommets du polygone) qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone et qui le divisent en triangles.

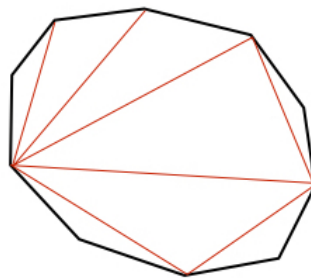


FIGURE 2 – Un exemple de triangulation

QUESTION 8 – Montrer qu'une triangulation d'un polygone à n côtés possède $(n - 3)$ cordes et $(n - 2)$ triangles.

Le problème considéré est celui de la triangulation optimale de polygones. On part d'un polygone convexe $P = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ où les sommets sont donnés dans l'ordre direct. Les triangulations sont alors définies sur les triangles formés par les côtés et les cordes de P . Le poids d'un triangle est défini comme son périmètre : $w(i, j, k) = \|v_i v_j\| + \|v_j v_k\| + \|v_k v_i\|$. On cherche ainsi une triangulation qui minimise la somme des poids de ses triangles.

On peut remarquer qu'un polygone composé d'un sous-ensemble de sommets d'un polygone convexe est toujours lui-même convexe. On note donc, pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $t[i, j]$ le poids d'une triangulation optimale du polygone $\langle v_{i-1}, \dots, v_j \rangle$, avec pour convention $t[i, i] = 0$.

QUESTION 9 – Définir t récursivement. En déduire un algorithme. Quelle est sa complexité ?

QUESTION 10 – Que constatez-vous si la fonction de poids est prise égale à l'aire du triangle ?